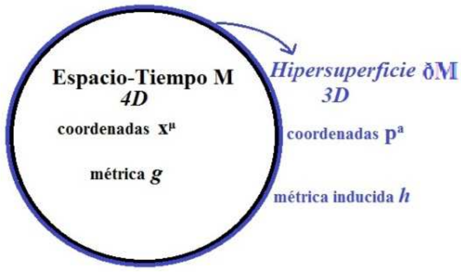
V-57 (50 min) 8-julio-2019 Resumen (sin mucho detalle) de Miguel Cañizares	**Término frontera (2)** **Acción de Gibbons-Hawking-York**

Recordemos la Acción de Einstein-Hilbert: $\boldsymbol{S_{EH}[g] = \int d^4x \sqrt{-g} \cdot R}$
Para aplicar un principio de mínima acción calculamos su variación, al variar la métrica g, para igualarla a cero:
(IV) de resumen v-54: $\boldsymbol{\delta S[g] = \int d^4x \sqrt{-g}\ \delta g^{\alpha\beta} \left[R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} \right] \ + \ \int d^4x \cdot \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} \cdot J^\lambda\right) = 0}$

El primer término se hace cero si $\boldsymbol{R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} = 0}$
(ecuación de campo de Einstein en ausencia de masa en el espacio tiempo M)

El segundo término $\boldsymbol{\int d^4x \cdot \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} \cdot J^\lambda\right)}$ vamos a ver que está relacionado con la frontera ∂M de dicho espacio-tiempo.



Ese segundo término, en principio, es una integral extendida al Hipervolumen 4D de la divergencia de un vector, siendo $d^4x\sqrt{-g}$ un diferencial de hipervolumen, pues para que sea invariante, según se justifica en el video 58, hay que multiplicar por $\sqrt{-g}$:

$$\int_M d^4x \cdot \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} \cdot J^\lambda\right) = \int_M d^4x \sqrt{-g} \cdot \partial_\lambda J^\lambda = \int_M d^4x \sqrt{-g} \cdot \nabla_\lambda J^\lambda$$

Podemos considerar el teorema de la divergencia en un espacio-tiempo 4D: "*La integral de la divergencia de un vector, extendida a un "hipervolumen 4D" es igual a la integral del vector, extendida a la "hipersuperficie 3D" que limita a dicho hipervolumen*".

Cualquier elemento de hipersuperficie es: $\overrightarrow{d\Sigma} = \vec{n}\, d\Sigma = \vec{n}\, d^3p \sqrt{|h|}$, pues para que sea invariante hay que multiplicar por la raíz del valor absoluto de la métrica $\sqrt{|h|}$ **,** que en este caso es la inducida en la hipersuperficie.
Aplicamos el teorema de la divergencia:

(se hace el producto escalar $\boldsymbol{n_\mu J^\mu}$) **:** $\int_M d^4x \cdot \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} \cdot J^\lambda\right) = \int_{\partial M} d\Sigma_\mu \cdot J^\mu = \int_{\partial M} d^3p \sqrt{|h|}\ n_\mu J^\mu$

Hemos comprobado que el segundo término de la variación de la acción está relacionado con la frontera. Ahora, teniendo en cuenta que $J^\mu = g^{\alpha\beta}\left(\delta\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right) - g^{\alpha\mu}\left(\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}\right)$ **y** hallando las variaciones de los Christoffel, tras una larga deducción, se llega a otra expresión de dicho segundo término:

$$\boldsymbol{\int d^4x \cdot \partial_\lambda \left(\sqrt{-g} \cdot J^\lambda\right) = - \int_{\partial M} d^3p \sqrt{|h|}\ h^{\alpha\beta} n^\mu\, \partial_\mu (\delta g_{\alpha\beta})} \qquad \textbf{(I)}$$

Queda una integral extendida sobre la frontera ∂M y sabemos que la métrica $g_{\alpha\beta}$ no varía en dicha frontera. No obstante puede variar hacia dentro o hacia afuera, por lo que la derivada parcial (en todas direcciones) $\boldsymbol{\partial_\mu(\delta g_{\alpha\beta})}$ no podemos afirmar que sea nula. Lo sería si hubiera un proyector que proyectara esa derivada sobre la hipersuperficie, pero eso no lo hace $h^{\alpha\beta}$, pues ninguno de sus índices coincide con el de la derivada μ.

<u>Gibbons, Hawking y York propusieron añadier un término S_{GHY} a la acción S_{EH} de Einstein-Hilbert</u> con objeto de que su variación anule al término frontera **(I).**

La acción de Einstein-Hilbert era: $\boldsymbol{S_{EH}[g] = \int_M d^4x \sqrt{|g|} \cdot R}$
Es una integral extendida al hipervolumen $\boldsymbol{M}$ de la curvatura escalar $\boldsymbol{R}$, con la métrica $\boldsymbol{g}$ del interior.

La parte de acción añadida es: $\boldsymbol{S_{GHY}[g] = 2 \int_{\partial M} d^3p \sqrt{|h|} \cdot K}$ **(II)**
Es una integral extendida a la hipersuperficie frontera $\boldsymbol{\partial M}$ de su curvatura extrínseca $\boldsymbol{K}$, con la métrica $\boldsymbol{h}$ inducida
Es funcional de la métrica $\boldsymbol{g}$**,** pues si varia ésta varía la inducida $\boldsymbol{h}$ en la hipersuperficie y también su curvatura extrínseca $\boldsymbol{K}$.

En el video se hace una larga demostración de la variación $\boldsymbol{\delta S_{GHY}[g]}$ y se llega a:

$\boldsymbol{\delta S_{GHY}[g] = + \int_{\partial M} d^3p \sqrt{|h|}\ h^{\alpha\beta} n^\mu\, \partial_\mu(\delta g_{\alpha\beta})}$ que anulará al término **(I)** de la variación de la Acción EH

Recapitulación:

Consideraremos la Acción de Einstein-Hilbert-Gibbons-Hawking-York:

$$\boldsymbol{S_{EHGHY}[g] = \int_M d^4x \sqrt{|g\,|} \cdot R \; + \; 2 \int_{\partial M} d^3p \; \sqrt{|h|} \cdot K} \qquad \textbf{(III)}$$

Al introducir el término GHY, la variación de la Acción completa al variar la métrica $\boldsymbol{g}$, puesto que se anula el término de frontera, quedará:

$$\boldsymbol{\delta S_{EHGHY}[g] = \int_M d^4x \sqrt{-g} \;\; \delta g^{\alpha\beta} \left[R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} \right]} \qquad \textbf{(IV)}$$

Por lo tanto, al aplicar el principio de mínima acción, obligando a que esa variación sea nula, se tiene que cumplir lo que se conoce como **ecuación de campo de Einstein, en ausencia de masa**:

$$\boldsymbol{R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} = 0} \qquad \textbf{(V)}$$